A Matrix-Algebra

In diesem Anhang geben wir eine kompakte Einführung in die Matrizenrechnung bzw. Matrix-Algebra. Eine leicht lesbare Einführung mit sehr vielen Beispielen bietet die „Einführung in die Moderne Matrix-Algebra“ von Schmidt & Trenkler (2006).

A.1 Definition und elementare Operationen

Definition A.1 Reelle Matrix

Ein nach n Zeilen und p Spalten geordnetes Schema $\boldsymbol{A}$ von $n \cdot p$ Elementen $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

heißt reelle Matrix der Ordnung $n \times p$, der Dimension $n \times p$ oder kurz $n \times p$ Matrix. Kurzschreibweise: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, p$.

Zwei $n \times p$ Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ und $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ sind genau dann gleich, wenn für alle i, j gilt: $a_{ij} = b_{ij}$.

Die Zeilen von $\boldsymbol{A}$ können als Vektoren des $\mathbb{R}^p$ (sog. Zeilenvektoren) und die Spalten als Vektoren des $\mathbb{R}^n$ (sog. Spaltenvektoren) angesehen werden. Dabei wird der i-te Zeilenvektor von $\boldsymbol{A}$ mit $a^i = (a_{i1}, \ldots, a_{ip})$ und der j-te Spaltenvektor mit

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Definition A.2 Transponierte Matrix

Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ eine $n \times p$ Matrix. Dann ist die transponierte Matrix $\boldsymbol{A}'$ definiert als diejenige Matrix, die man durch das Vertauschen der Zeilen und Spalten von $\boldsymbol{A}$ erhält:

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}'$ ist von der Ordnung $p \times n$.

Beispiel A.1

Betrachte die 3×4 Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die transponierte von $\boldsymbol{A}$ ist gegeben durch die 4×3 Matrix

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Definition A.3 Quadratische Matrix

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt quadratisch, falls sie von der Ordnung $n \times n$ ist. Die Diagonale, welche aus den Elementen $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ besteht, heißt Hauptdiagonale.

Definition A.4 Diagonalmatrix

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{D}$ heißt Diagonalmatrix, wenn ihre Einträge unter- und oberhalb der Hauptdiagonalen Null sind, d.h. $\boldsymbol{D}$ besitzt folgende Gestalt:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

Schreibweise: $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Definition A.5 Einheitsmatrix

Die Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{I}_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Einheitsmatrix.

Definition A.6 Symmetrische Matrix

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt symmetrisch, wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$ gilt.

Offenbar ist jede Diagonalmatrix, also auch die Einheitsmatrix, eine symmetrische Matrix.

Beispiel A.2

Ein Beispiel für eine symmetrische Matrix ist gegeben durch

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 7 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

△

Definition A.7 Summe und skalare Multiplikation von Matrizen

Die Summe $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ zweier $n \times p$ Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ und $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ ist definiert als:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Die Multiplikation von $\boldsymbol{A}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\lambda \boldsymbol{A} = (\lambda\, a_{ij}).$$

Beispiel A.3

Betrachte die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Summe von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+4 & 3+2 \\ 3+3 & 5+1 & 2+0 \\ 1-1 & 2+2 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

△

Satz A.1 Rechenregeln

Für beliebige $n \times p$ Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ und beliebige Skalare $r, k \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Assoziativgesetz für die Addition: $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$.
2. Kommutativgesetz: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$.
3. Distributivgesetze für die skalare Multiplikation: $(k + r)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{A}$ bzw. $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$.
4. Assoziativgesetz für die skalare Multiplikation: $(kr)\boldsymbol{A} = k(r\boldsymbol{A})$.
5. $(k\boldsymbol{A})' = k\boldsymbol{A}'$.
6. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$.

Definition A.8 Matrixmultiplikation

Das Produkt der $n \times p$ Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ mit der $p \times m$ Matrix $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ ist die $n \times m$ Matrix

$$AB = C = (c_{ik}) \qquad \text{mit} \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.$$

Ausführlich erhalten wir demnach

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} b_{j1} & \cdots & \sum_j a_{1j} b_{jm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_j a_{nj} b_{j1} & \cdots & \sum_j a_{nj} b_{jm} \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ nur dann multiplizierbar sind, wenn die Anzahl der Spalten von $\boldsymbol{A}$ gleich der Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$ ist. Im Allgemeinen ist die Matrixmultiplikation darüberhinaus nicht kommutativ, d.h. es gilt $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Beispiel A.4

Betrachte die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir für das Produkt

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

△

Beispiel A.5

Falls $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ zwei Skalare sind, ist bekannt, dass

$$a \cdot b = 0$$

genau dann gilt, wenn entweder $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Diese Tatsache wird auch in vielen Beweisen verwendet. Wir zeigen im Folgenden in einem Gegenbeispiel dass für Matrixprodukte aus

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

keineswegs folgt, dass $\boldsymbol{A}$ oder $\boldsymbol{B}$ Nullmatrizen sein müssen. Wir betrachten dazu die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -8 \\ -3 & -6 & -12 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für das Produkt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -8 \\ -3 & -6 & -12 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt der beiden Matrizen ist also die Nullmatrix, obwohl es sich bei keinem der beiden Faktoren um die Nullmatrix handelt.

△

Satz A.2 Darstellung von Summen als Matrixprodukte

Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{1}$ der $n \times 1$ Vektor, dessen Einträge sämtlich aus Einsen besteht. Dann gilt:

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{1}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\mathbf{1}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}$.
3. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$.

Satz A.3 Rechenregeln für die Matrixmultiplikation

Für Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ passender Ordnungen gilt:

1. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$.
2. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.
3. $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.
4. $\boldsymbol{AI}_n = \boldsymbol{A}$ bzw. $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Definition A.9 Kroneckerprodukt

Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ Matrizen der Ordnungen $n \times p$ und $r \times q$. Dann ist das Kroneckerprodukt von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ definiert als diejenige Matrix $\boldsymbol{C}$ der Ordnung $nr \times pq$ mit

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1p}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{B} & a_{n2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{np}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

Beispiel A.6

Betrachte die beiden Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das Kronckerprodukt der beiden Matrizen ist dann gegeben durch

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \boldsymbol{B} & 4 \cdot \boldsymbol{B} \\ 1 \cdot \boldsymbol{B} & 3 \cdot \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & 16 & 12 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Satz A.4 Rechenregeln für das Kroneckerprodukt

Seien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ Matrizen passender Ordnungen sowie k ein Skalar. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $k(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = (k\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \otimes (k\boldsymbol{B})$.
2. $\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C}$.
3. $\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C})$.
4. $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \otimes \boldsymbol{B}'$.
5. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \otimes (\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{D})$.

Definition A.10 Orthogonale Matrix

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt orthogonal, wenn $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ gilt.

Satz A.5 Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Sei $\boldsymbol{A}$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt:

1. Die Zeilenvektoren bzw. die Spaltenvektoren bilden ein Orthonormalsystem, d.h. die Vektoren besitzen Länge Eins und sind paarweise orthogonal.
2. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ ist orthogonal, wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ orthogonal sind.

Definition A.11 Idempotente Matrix

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt idempotent, wenn gilt: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.
Eine spezielle, in der Statistik wichtige idempotente Matrix ist die $n \times n$ Matrix

$$\boldsymbol{C} := \boldsymbol{I}_n - \frac{1}{n}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}'.$$

Es gelten die folgenden Aussagen:

1. Multiplikation von $\boldsymbol{C}$ mit einem beliebigen $n \times 1$ Vektor $\boldsymbol{a}$ ergibt

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 - \bar{a} \\ \vdots \\ a_n - \bar{a} \end{pmatrix},$$

d.h. man erhält den mittelwertszentrierten Vektor.

2. Multiplikation von $\boldsymbol{C}$ mit einer $n \times m$ Matrix $\boldsymbol{A}$ liefert

$$\boldsymbol{CA} = \begin{pmatrix} a_{11} - \bar{a}_1 & \cdots & a_{1m} - \bar{a}_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - \bar{a}_1 & \cdots & a_{nm} - \bar{a}_m \end{pmatrix},$$

   wobei $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ die Mittelwerte der Spalten von A sind.
3. $\boldsymbol{C1} = \boldsymbol{0}$.
4. $\boldsymbol{1}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}'$.
5. $\boldsymbol{11}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C11}' = \boldsymbol{0}$.
6. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ wobei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$.

Satz A.6 Eigenschaften idempotenter Matrizen

Für idempotente Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gilt:

1. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, also $\boldsymbol{AB}$ idempotent.
2. $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ ist idempotent.
3. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

A.2 Der Rang einer Matrix

Definition A.12 Zeilenrang, Spaltenrang, Zeilenraum, Spaltenraum Sei $\boldsymbol{A}$ eine $n \times p$ Matrix. Die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren des $\mathbb{R}^n$ heißt Spaltenrang von $\boldsymbol{A}$, geschrieben $\text{rgs}(\boldsymbol{A})$. Der von den (linear unabhängigen) Spaltenvektoren aufgespannte Unterraum heißt Spaltenraum, geschrieben $S(\boldsymbol{A})$. Es gilt:

$$S(\boldsymbol{A}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \boldsymbol{A}x = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i, x \in \mathbb{R}^p \right\}$$

Entsprechend kann man den Zeilenrang $\text{rgz}(\boldsymbol{A})$ von $\boldsymbol{A}$ als die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von $\boldsymbol{A}$ definieren. Der von den (linear unabhängigen) Zeilen aufgespannte Unterraum $Z(\boldsymbol{A})$ heißt Zeilenraum. Es gilt:

$$Z(\boldsymbol{A}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^p : z = \boldsymbol{A}'x = \sum_{i=1}^{n} (a^i)' x_i, x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Satz A.7 Spaltenrang = Zeilenrang Spaltenrang und Zeilenrang einer $n \times p$ Matrix $\boldsymbol{A}$ sind gleich, d.h.

$$\text{rgs}(\boldsymbol{A}) = \text{rgz}(\boldsymbol{A}).$$

Definition A.13 Rang einer Matrix

Der Rang $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A})$ einer $n \times p$ Matrix $\boldsymbol{A}$ ist definiert als

$$\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) := \mathrm{rgs}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rgz}(\boldsymbol{A}) \leq \min\{n, p\}$$

Gilt $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \min\{n, p\}$, so besitzt $\boldsymbol{A}$ vollen Rang und wird als regulär bezeichnet. Für $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = n$ ($\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = p$) heißt $\boldsymbol{A}$ zeilenregulär (spaltenregulär).

Satz A.8 Allgemeine Rangbeziehungen

Für Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ passender Ordnungen gilt:

1. $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rg}(-\boldsymbol{A})$.
2. $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}') = \mathrm{rg}(\boldsymbol{A})$.
3. $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leq \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rg}(\boldsymbol{B})$.
4. $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leq \min\{\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}), \mathrm{rg}(\boldsymbol{B})\}$.
5. $\mathrm{rg}(\boldsymbol{I}_n) = n$.

Definition A.14 Nullraum

Der Nullraum $N(\boldsymbol{A})$ einer $n \times p$ Matrix $\boldsymbol{A}$ ist definiert als die Menge

$$N(\boldsymbol{A}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.$$

Definition A.15 Zeilenraum, Spaltenraum

Der Zeilenraum $Z(\boldsymbol{A})$ einer $n \times p$ Matrix $\boldsymbol{A}$ ist der durch die Zeilen von $\boldsymbol{A}$ aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^n$:

$$Z(\boldsymbol{A}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \text{ für ein } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p\}.$$

Analog lässt sich der Spaltenraum (als Teilraum des $\mathbb{R}^p$) definieren.

Satz A.9 Eigenschaften des Nullraums

Sei $\boldsymbol{A}$ eine $n \times p$ Matrix. Dann gilt:

1. Der Nullraum ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^p$.
2. $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) + \dim(N(\boldsymbol{A})) = p$ bzw. $\dim(N(\boldsymbol{A})) = p - \mathrm{rg}(\boldsymbol{A})$. Die Dimension des Nullraums $N(\boldsymbol{A})$ wird als Defekt von $\boldsymbol{A}$ bezeichnet.
3. Der Nullraum $N(\boldsymbol{A})$ ist das orthogonale Komplement des Zeilenraums $Z(\boldsymbol{A})$ von $\boldsymbol{A}$.
4. $N(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = N(\boldsymbol{A})$.

Definition A.16 Inverse einer Matrix

Sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische Matrix. Eine Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ heißt Inverse zur Matrix $\boldsymbol{A}$, falls gilt:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Satz A.10 Existenz und Eindeutigkeit der Inversen

Die Inverse einer quadratischen $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert genau dann, wenn $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = n$ gilt, also wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist. Die Inverse ist dann eindeutig bestimmt und die Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt invertierbar.

Satz A.11 Rechenregeln für Inverse

Seien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ invertierbare Matrizen gleicher Ordnung und $k \neq 0$ ein Skalar. Dann gilt

1. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.
3. $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$.
4. $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
5. $(\boldsymbol{ABC})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
6. $\boldsymbol{A}$ symmetrisch $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$ symmetrisch.
7. Für eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ gilt
$$\boldsymbol{A}^{-1} = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$
8. Falls $\boldsymbol{A}$ orthogonal ist, gilt $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}'$.
9. Sei $\boldsymbol{A}$ partitioniert in
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$
und seien die Submatrizen $\boldsymbol{A}_{11}$ und $\boldsymbol{A}_{22}$ quadratisch und invertierbar. Dann gilt
$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \\ -\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1} + \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$
mit $\quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}$,

und $\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} + \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}^{-1} \\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix}$

mit $\quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$.

A.3 Determinante und Spur einer Matrix

Definition A.17 Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ der Ordnung $n \times n$ ist definiert als

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\boldsymbol{A}_{-ij}|,$$

wobei $\boldsymbol{A}_{-ij}$ die $n-1 \times n-1$ dimensionale Matrix bezeichnet, die durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus $\boldsymbol{A}$ entsteht. Für skalare Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{11})$ der Ordnung 1×1 gilt $|\boldsymbol{A}| = a_{11}$.

Beispiel A.7

1. Für eine 2×2 Matrix gilt $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
2. Für eine 3×3 Matrix gilt $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$.

△

Die Determinante einer Matrix $\boldsymbol{A}$ lässt sich geometrisch interpretieren. Wir veranschaulichen die geometrische Interpretation anhand der Determinante der 2×2 Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Spaltenvektoren $a_1 = (4,1)'$ und $a_2 = (2,3)'$ der Matrix sind als Ortsvektoren in Abbildung A.1 abgebildet. Die Determinante von $\boldsymbol{A}$ ist gegeben durch

$$|\boldsymbol{A}| = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1.$$

Die Determinante von $\boldsymbol{A}$ ist also gleich dem *Flächeninhalt* des von den den beiden Spaltenvektoren gebildeten Parallelogramms. Diese Interpretation einer Determinante ist allgemeingültig. Bei 3×3 Matrizen handelt es sich bei der Determinante von $\boldsymbol{A}$ um das Volumen des von den drei Spaltenvektoren aufgespannten Körpers. Für $n > 3$ ergeben sich analoge Interpretationen.

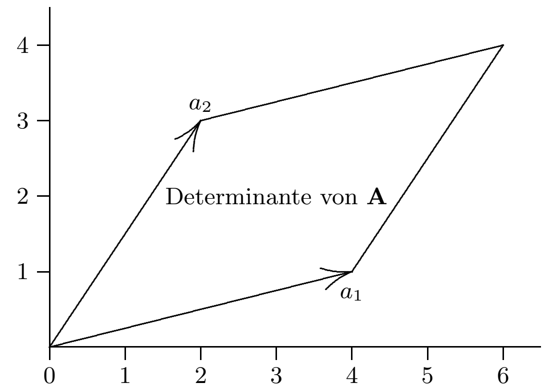

Abb. A.1. Geometrische Veranschaulichung der Determinante einer 2×2 Matrix.

Im Folgenden wollen wir einige wichtige Eigenschaften von Determinanten zusammentragen. Wir beginnen mit der Determinante der transponierten Matrix $\boldsymbol{A}'$ einer Matrix $\boldsymbol{A}$.

Satz A.12 Determinante der Transponierten

Für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt $|\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|$.

Satz A.13 Determinanten einiger bestimmter Matrizen

Sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische Matrix. Dann gilt:

1. Wenn eine Zeile (Spalte) von $\boldsymbol{A}$ aus Nullen besteht, dann gilt $|\boldsymbol{A}| = 0$.
2. Wenn $\boldsymbol{A}$ zwei identische Zeilen (Spalten) besitzt, dann gilt $|\boldsymbol{A}| = 0$.
3. Die Determinante einer Matrix in Dreiecksform ist das Produkt der Diagonalelemente. Eine Matrix besitzt Dreiecksform, wenn alle Elemente ober bzw. unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind.
4. $|\boldsymbol{I}| = 1$

Satz A.14 Eigenschaften von Determinanten

Für die Determinante einer $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt:

1. $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$.
2. $|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = n$.
3. $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.
4. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.
5. $\boldsymbol{A}$ orthogonal $\Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \pm 1$.

Definition A.18 Spur einer Matrix

Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ eine quadratische $n \times n$ Matrix. Dann heißt die Summe der Diagonalelemente Spur von $\boldsymbol{A}$, in Zeichen

$$\mathrm{sp}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Beispiel A.8

Wir betrachten die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -10 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Als Spur von $\boldsymbol{A}$ erhalten wir

$$sp(\boldsymbol{A}) = 6 + 2 + 7 + 8 = 23.$$

△

Satz A.15 Eigenschaften der Spur

Für die Spur der $n \times n$ Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gilt:

1. $\mathrm{sp}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{sp}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{sp}(\boldsymbol{B})$.
2. $\mathrm{sp}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{sp}(\boldsymbol{A}')$.
3. $\mathrm{sp}(k\boldsymbol{A}) = k \cdot \mathrm{sp}(\boldsymbol{A})$.
4. $\mathrm{sp}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{sp}(\boldsymbol{BA})$. Dies bleibt auch für den Fall gültig, dass $\boldsymbol{A}$ eine $n \times p$ und $\boldsymbol{B}$ eine $p \times n$ Matrix ist.
5. Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\mathrm{sp}(\boldsymbol{xy}') = \mathrm{sp}(\boldsymbol{yx}') = \mathrm{sp}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}$.

A.4 Verallgemeinerte Inverse

Definition A.19 Verallgemeinerte Inverse

Sei $\boldsymbol{A}$ eine beliebige $n \times p$ Matrix mit $n \leq p$. Dann heißt die $p \times n$ Matrix $\boldsymbol{A}^-$ verallgemeinerte Inverse oder g-Inverse (generalized Inverse) von $\boldsymbol{A}$ falls gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

Satz A.16 Existenz der verallgemeinerten Inversen

Zu jeder Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert eine verallgemeinerte Inverse, die aber im Allgemeinen nicht eindeutig ist.

Satz A.17 Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen

Sei $\boldsymbol{A}^-$ eine verallgemeinerte Inverse der Matrix $\boldsymbol{A}$. Dann gilt:

1. $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})$.
2. $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}^-)$.
3. $\boldsymbol{A}$ regulär $\Rightarrow \boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}^{-1}$. Insbesondere ist in diesem Fall die verallgemeinerte Inverse eindeutig.
4. $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ sind idempotent.

A.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition A.20 Eigenwert und Eigenvektor

Sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische $n \times n$ Matrix. Dann heißt (die im Allgemeinen komplexe Zahl) $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $\boldsymbol{A}$, wenn ein (im Allgemeinen komplexer) Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ existiert, so dass gilt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \qquad \text{bzw.} \qquad (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Der Vektor $\boldsymbol{x}$ heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Bei der Berechnung der Eigenwerte einer Matrix $\boldsymbol{A}$ spielt folgende Determinante eine herausragende Rolle:

Definition A.21 Charakteristisches Polynom

Sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische $n \times n$ Matrix. Dann heißt

$$q(\lambda) := |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$$

charakteristisches Polynom von $\boldsymbol{A}$.

Bemerkung:

- Vergegenwärtigt man sich die Definition der Determinante (siehe Definition A.17), dann macht man sich leicht klar, dass $q(\lambda)$ tatsächlich ein Polynom vom Grad n ist. Wir können also $q(\lambda)$ äquivalent darstellen als

$$q(\lambda) = (-\lambda)^n + \alpha_{m-1}(-\lambda)^{m-1} + \cdots + \alpha_1(-\lambda) + \alpha_0, \tag{A.1}$$

  wobei die Skalare $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ zunächst unspezifiziert sind.

- Das Polynom $q(\lambda) := |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$ lässt sich stets auch in die Gestalt

$$q(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda) \tag{A.2}$$

  bringen, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Nullstellen des Polynoms sind. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat dieses Polynom genau n nicht notwendig verschiedene und auch nicht notwendig reellwertige Nullstellen. Vergleiche hierzu zum Beispiel Bronstein, Semendjajew (1991) Seite 134.

Der folgende Satz liefert nun eine Berechnungsmöglichkeit für die Eigenwerte einer Matrix:

Satz A.18 Berechnung der Eigenwerte über das charakteristische Polynom

Die Eigenwerte einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also die Lösungen von

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0.$$

Beispiel A.9

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Eigenwerte von A. Dazu berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \cdot 1 = \lambda^2 - 6.$$

Nullsetzen und Auflösen nach λ liefert die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{6}, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{6}. \end{aligned}$$

△

Beispiel A.10

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen wieder das charakteristische Polynom

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 8 = \lambda^2 + 4.$$

Nullsetzen liefert die komplexen Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2i, \\ \lambda_2 &= -2i. \end{aligned}$$

△

Satz A.19 Eigenschaften von Eigenwerten

Für die Eigenwerte λ_i einer $n \times n$ Matrix gelten folgende Eigenschaften:

1. $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
2. $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
3. A ist genau dann regulär, wenn alle Eigenwerte ungleich Null sind.
4. Die Matrizen A und A' besitzen dasselbe charakteristische Polynom und damit dieselben Eigenwerte.
5. Ist λ ein Eigenwert einer regulären Matrix A, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.
6. Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix D sind gerade die Hauptdiagonalelemente.
7. Für die Eigenwerte λ_i einer orthogonalen Matrix A gilt $\lambda_i = \pm 1$.
8. Die Eigenwerte einer idempotenten Matrix A sind 1 oder 0.

Definition A.22 Eigenraum

Sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische Matrix und λ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$. Die Menge

$$\boldsymbol{A}_\lambda := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | \boldsymbol{x} \text{ Eigenvektor zu } \lambda\} \cup \{0\}$$

heißt Eigenraum zum Eigenwert λ. Jeder Eigenraum $\boldsymbol{A}_\lambda$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Definition A.23 Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ heißen ähnlich (in Zeichen $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$), wenn eine reguläre Matrix $\boldsymbol{C}$ existiert, so dass $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}$ gilt.

Bemerkung:
Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation, d.h.es gilt:

1. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$
3. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C} \Longrightarrow \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$

Satz A.20 Eigenwerte ähnlicher Matrizen

Für ähnliche Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gilt:

1. $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ haben dasselbe charakteristische Polynom und damit dieselben Eigenwerte.
2. Ist $\boldsymbol{x}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ, so ist $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ Eigenvektor der Matrix $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}$.

Satz A.21 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

Sei $\boldsymbol{A}$ eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Dann gilt:

1. Alle Eigenwerte sind reell.
2. Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind paarweise orthogonal.

Satz A.22 Spektralzerlegung

Sei $\boldsymbol{A}$ eine symmetrische $n \times n$ Matrix mit $\text{rg}(\boldsymbol{A}) = r$. Dann existiert eine $n \times r$ Matrix $\boldsymbol{P}$, so dass gilt:

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)\boldsymbol{P}'.$$

Dabei sind die λ_i die von Null verschiedenen Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ (Insbesondere entspricht der Rang von $\boldsymbol{A}$ der Anzahl der von Null verschiedenen Eigenwerte). Die Spaltenvektoren von $\boldsymbol{P}$ entsprechen den (paarweise orthonormalen) zugehörigen Eigenvektoren.

Satz A.23 Spektralzerlegung einer idempotenten Matrix

Sei $\boldsymbol{A}$ eine symmetrische und idempotente $n \times n$ Matrix mit $\text{rg}(\boldsymbol{A}) = r$. Dann existiert eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{A}$ so dass gilt

$$P'AP = I_r$$

Außerdem ergibt sich

$$\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{sp}(\boldsymbol{A}).$$

A.6 Quadratische Formen

Definition A.24 Quadratische Form

Sei $\boldsymbol{A}$ eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Eine quadratische Form in einem Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} a_{ij}x_i x_j.$$

Definition A.25 Definite Matrizen

Die quadratische Form $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ und die Matrix $\boldsymbol{A}$ heißen

1. positiv definit, falls $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq 0$. Schreibweise: $\boldsymbol{A} > 0$.
2. positiv semidefinit, falls $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$ und $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ für mindestens ein $\boldsymbol{x} \neq 0$.
3. nichtnegativ definit, falls $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ bzw. $\boldsymbol{A}$ entweder positiv oder positiv semidefinit ist. Schreibweise: $\boldsymbol{A} \geq 0$.
4. negativ definit, wenn $-\boldsymbol{A}$ positiv definit ist.
5. negativ semidefinit, wenn $-\boldsymbol{A}$ positiv semidefinit ist.
6. indefinit in allen anderen Fällen.

Satz A.24 Kriterium für die Definitheit einer Matrix

Sei $\boldsymbol{A}$ eine symmetrische Matrix mit den (reellen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann ist $\boldsymbol{A}$ genau dann

1. positiv definit, wenn $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$,
2. positiv semidefinit, wenn $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und mindestens ein $\lambda_i = 0$,
3. negativ definit, wenn $\lambda_i < 0$ für alle $i = 1 \ldots, n$,
4. negativ semidefinit, wenn $\lambda_i \leq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und mindestens ein $\lambda_i = 0$,
5. indefinit, wenn $\boldsymbol{A}$ mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.

Satz A.25 Eigenschaften positiv definiter Matrizen

Sei $\boldsymbol{A}$ positiv definit. Dann gilt:

1. $\boldsymbol{A}$ ist regulär (und damit invertierbar).

2. $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist positiv definit.
3. Für die Diagonalelemente a_{ii}, $i = 1, \dots, n$ gilt: $a_{ii} > 0$.
4. $\text{sp}(\boldsymbol{A}) > 0$.
5. Sei $\boldsymbol{B}$ positiv semidefinit. Dann ist $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ positiv definit.

Satz A.26

Seien $\boldsymbol{A}$ eine $n \times n$ und $\boldsymbol{Q}$ eine $n \times m$ Matrix. Dann gilt:

1. Ist $\boldsymbol{A}$ nichtnegativ definit, so ist auch $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ nichtnegativ definit.
2. Ist $\boldsymbol{A}$ positiv definit und $\boldsymbol{Q}$ spaltenregulär, so ist auch $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ positiv definit.

Satz A.27

Sei $\boldsymbol{B}$ eine $n \times p$ Matrix. Dann ist die Matrix $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ symmetrisch und nicht negativ definit. Sie ist positiv definit, wenn $\boldsymbol{B}$ spaltenregulär ist. Neben $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ ist dann auch $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ nichtnegativ definit.

Satz A.28 Eigenwerte von $B'B$ und BB'

Sei $\boldsymbol{B}$ eine $n \times p$ Matrix mit $\text{rg}(\boldsymbol{B}) = r$. Dann gilt:

1. Sowohl $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ als auch $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ besitzen r von Null verschiedene Eigenwerte λ_j, $j = 1, \dots, r$. Diese sind positiv und identisch für $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ und $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$.
2. Falls $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ zum Eigenwert λ ist, dann ist

$$\boldsymbol{u} := \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}$$

ein Eigenvektor von $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ zum Eigenwert λ.

Satz A.29 Cholesky-Zerlegung

Jede symmetrische und positiv definite $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{A}$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}',$$

wobei $\boldsymbol{L}$ die Gestalt einer unteren Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen besitzt. $\boldsymbol{L}$ heißt Cholesky-Faktor von $\boldsymbol{A}$.

A.7 Differentiation von Matrixfunktionen

Definition A.26 Differentiation nach einem Skalar

Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ eine $n \times p$ Matrix, deren Elemente differenzierbare Funktionen der reellen Variablen t seien. Dann heißt die Matrix

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right)$$

Ableitung von $\boldsymbol{A}$ nach t.

Satz A.30 Rechenregeln

Sei $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ Matrizen passender Ordnungen. Dann gilt:

1. $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial a_{ij}} = e_i e_j'$, wobei $e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0)'$.
2. $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial a_{ij}} = e_j e_i'$.
3. $\dfrac{\partial \boldsymbol{AB}}{\partial t} = \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Produktregel).

Satz A.31 Differentiation von Funktionalen einer Matrix

Sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische Matrix, deren Elemente differenzierbare Funktionen der reellen Variablen t seien. Dann gilt:

1. Die Ableitung der Spur ist die Spur der Ableitung:
$$\frac{\partial \operatorname{sp}(\boldsymbol{A})}{\partial t} = \operatorname{sp}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right).$$
2. Ist $\boldsymbol{A}$ invertierbar, so ergibt sich die Ableitung der Inversen als
$$\frac{\partial \boldsymbol{A}^{-1}}{\partial t} = -\boldsymbol{A}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{A}^{-1}.$$
3. Ist $\boldsymbol{A}$ invertierbar, so ergibt sich die Ableitung der logarithmierten Determinante als
$$\frac{\partial \log(|\boldsymbol{A}|)}{\partial t} = \operatorname{sp}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right).$$

Definition A.27 Differentiation nach einer Matrix

Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ eine $n \times p$ Matrix und $f(\boldsymbol{A})$ eine differenzierbare reellwertige Funktion der np Elemente a_{ij}. Dann heißt die $n \times p$ Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}} = \left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \right)$$

Ableitung von f nach $\boldsymbol{A}$.

Satz A.32 Rechenregeln

Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ Matrizen, f und g Funktionen von Matrizen sowie $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Vektoren. Bei den folgenden Größen wird angenommen, dass sie existieren und von passender Ordnung sind. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1. $\dfrac{\partial fg}{\partial \boldsymbol{A}} = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}} g + f \dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{A}}.$
2. $\dfrac{\partial \mathrm{sp}(\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} = I.$
3. $\dfrac{\partial \mathrm{sp}(\boldsymbol{BA})}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{B}'.$
4. $\dfrac{\partial \mathrm{sp}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{BA})}{\partial \boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}')\boldsymbol{A}.$
5. $\dfrac{\partial \mathrm{sp}(\boldsymbol{ABA}')}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}').$
6. $\dfrac{\partial \mathrm{sp}(\boldsymbol{ABA})}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'.$
7. $\dfrac{\partial \boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}.$
8. $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{Ay}}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{xy}'.$
9. $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{Ax}}{\partial \boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}')\boldsymbol{x}.$
10. Für symmetrisches $\boldsymbol{A}$ gilt

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{Ax}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{Ax} = 2\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}.$$